Premise of an alternative theory to the bi-spinor theory of Paul Dirac

Christian Preziosa

1ère partie : Densité de probabilité de présence ou densité d’énergie de la particule libre ?
Presence probability density or energy density of the free particle?

2ème partie : Prémisse d’une théorie alternative à la théorie des bi-spineurs de Paul Dirac
Premise of an alternative theory to the bi-spinor theory of Paul Dirac

Christian Preziosa
Docteur-Ingénieur ESB
christian.preziosa@gmx.fr

1ère partie

1- Introduction :

Etablir une théorie physique rendant compte de l’existence des particules semble être un projet très ambitieux. Cependant, nous devons garder l’espoir qu’un jour ce vœu pieux puisse se réaliser, comme le soulignait Louis de Broglie dans son ouvrage « nouvelle perspectives en microphysique » datant de 1955:

« Si, au prix d’un effort qui serait certainement long et difficile, on parvenait à étendre la Relativité généralisée de façon à faire rentrer les ondes u des diverses sortes de particules dans le cadre de l’espace-temps, on pourrait établir la forme des équations non linéaires satisfaites par les ondes u, étudier ce qui se passe dans les régions singulières et parvenir à comprendre la véritable nature de ces accidents spatio-temporels qui sont les corpuscules et aussi la signification profonde du quantum d’action qui est certainement lié d’une façon essentielle à la structure à la fois granulaire et ondulatoire de la matière et du rayonnement. On obtiendrait ainsi (ce n’est pas encore pour demain !) une magnifique synthèse des conceptions de la Relativité généralisée et de la théorie des Quanta. »

Essayons d’apporter une petite pierre à l’édifice projeté par l’éminent chercheur.

2- Représentation ondulatoire de l’énergie

Il y a quelque chose dans la dualité onde-corpuscule de déconcertant, mais nous devons toujours penser, en tant que physicien, qu’une explication rationnelle et simple nous échappe. Elle est peut-être sous nos yeux avec l’exemple du photon et de son onde porteuse. En effet, la particule lumineuse présente une particularité intéressante : son absence de masse lui permet de se propager à une vitesse constante bien déterminée. Heuristiquement, il y a quelque chose à creuser de cette invariabilité physique. Cependant, le schéma électromagnétique classique ne peut pris comme tel pour une recherche avancée. Il faut y joindre quelque chose en plus. Projetons d’y ajouter une dimension spatiale supplémentaire et, par analogie avec le photon, faisons l’hypothèse que toutes les particules qui se manifestent dans l’espace-temps se propagent à la vitesse constante de la lumière dans cet espace étendu.

Procédant ainsi, nous admettons l’existence d’un vecteur champ μ_i, nommé champ matériel, à quatre composantes réelles, analogue au vecteur champ électrique $E_{\alpha}(-\vec{E})$ associé à l’onde électromagnétique dans le vide, mais agissant dans un univers à cinq dimensions $\overset{5}{V}$ de signature $(1,-1,-1,-1,-1)$, extension de l'espace-temps minkowskien. Nous nous référons à un repère cartésien local et à un système de coordonnées d'indices (0 à 3, 5), l'indice 4 étant omis pour éviter de le confondre avec l'indice temporel. A l'orthogonalité des vecteurs spatiaux champ électrique et direction unitaire $n_\alpha(-\vec{n})$ de l'onde correspond celle des vecteurs spatiotemporels champ matériel μ_i et de la vitesse unitaire u_i.

Le tenseur champ électromagnétique de l'onde dans le vide :

$$\varphi_{ij} = n_i E_j - n_j E_i = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

où $E_i = (0, E_\alpha)$, $n_i = (1, n_\alpha)$ et

$$c\vec{B} = \begin{pmatrix} -cB_x \\ -cB_y \\ -cB_z \end{pmatrix} = \vec{n} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} n^y E^z - n^z E^y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y - n_y E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 E_3 - n_3 E_2 \\ n_3 E_1 - n_1 E_3 \\ n_1 E_2 - n_2 E_1 \end{pmatrix}$$

et sa densité d'énergie-impulsion :

$$T_i^j = \frac{1}{4}\varphi^2 \delta_i^j - \varphi_{ik}\varphi^{jk} = 0 - (n_i E^k - n^k E_i)(n^j E_k - n_k E^j) = -E_k E^k n_i n^j = \vec{E}^2 n_i n^j$$

avec : $\varphi^2 = \varphi_{kl}\varphi^{kl}$, ont pour analogues, le tenseur champ matériel d'expression :

$$\varphi_{IJ} = u_I \mu_J - u_J \mu_I \quad \text{avec} \quad \mu_I = (\mu_i, 0) \quad \text{et} \quad u_I = (u_i, 1)$$

et sa densité d'énergie-impulsion :

$$T_I^J = \frac{1}{4}\varphi^2 \delta_I^J - \varphi_{IK}\varphi^{JK} = 0 - (u_I \mu^K - u^K \mu_I)(u^J \mu_K - u_K \mu^J) = -\mu^2 u_I u^J \qquad [1]$$

Mathématiquement, la conservation de l'énergie de l'onde matérielle s'exprime en égalant à zéro la divergence du tenseur T_I^J. Soit :

$$T_{I,J}^J = 0$$

Au prime abord, cette condition apparaît résulter d'aucune nécessité théorique, mais nous constaterons plus loin qu'elle est solution d'une équation de champ régissant l'état corpusculaire.

Montrons d'abord que tout tenseur φ_{IJ} antisymétrique, d'ordre 2, dérivable au moins une fois, satisfait à l'identité différentielle :

$$\boxed{(\frac{1}{4}\varphi_{KL}\varphi^{KL}\delta_I^J - \varphi_{IK}\varphi^{JK})_{,J} = \varphi^{JK}_{,\ K}\varphi_{IJ} + \frac{1}{2}(\varphi_{IJ,K} + \varphi_{JK,I} + \varphi_{KI,J})\varphi^{JK}}$$

En effet :

$$(\frac{1}{4}\varphi_{KL}\varphi^{KL}\delta_I^J)_{,J} = \frac{1}{2}\varphi_{JK,I}\varphi^{JK}$$
$$(-\varphi_{IK}\varphi^{IK})_{,J} = -\varphi_{IK,J}\varphi^{IK} - \varphi_{IK}\varphi^{IK}_{,\ J}$$

Or:

$$-\varphi_{IK,J}\varphi^{JK} = \varphi_{KI,J}\varphi^{JK} = \varphi_{IJ,K}\varphi^{JK} = \frac{1}{2}(\varphi_{IJ,K} + \varphi_{KI,J})\varphi^{JK}$$
$$-\varphi_{IK}\varphi^{JK}_{,\ J} = \varphi^{JK}_{,\ K}\varphi_{IJ}$$

D'où l'identité ci-dessus.

Ainsi, les équations, analogues aux équations de Maxwell dans le vide, qui s'écrivent sous forme tensorielle linéaire dans un repère local :

$$\begin{cases} \varphi^{JK}_{,\ K} = 0 \\ \varphi_{IJ,K} + \varphi_{JK,I} + \varphi_{KI,J} = 0 \end{cases}$$

Assurent l'in-divergence du tenseur T_I^J, et par là, la conservation de l'énergie.

De ces deux équations, il est aisé de tirer l'équation régissant l'onde matérielle à 5 dimensions :

$$\delta^{KL}\varphi_{IJ,KL} = 0$$

et pour $J = 5$, les 4 équations :

$$\delta^{KL}\mu_{i,KL} = 0$$

Cherchons des solutions harmoniques en x^5 de la forme :

$$\mu_i = \psi_i(x^j)\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x_5)$$

Si $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x_5) \neq 0$, il vient :

$$\boxed{\delta^{jk}\psi_{i,\,jk} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi_i = 0} \quad \textbf{(a)}$$

Cette équation est formellement analogue à l'équation de Klein-Gordon si l'on pose, tenant compte des notations habituelles :

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{m^2c^2}{\mathrm{h}^2} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mc}$$

Mais une différence fondamentale avec la théorie quantique orthodoxe est qu'elle régit ici un quadrivecteur à composantes réelles, en comparaison avec les quatre composantes complexes du bi-spineur de P. Dirac.

3- Représentation corpusculaire de l'énergie

Nous avons vu que la conservation de l'énergie est assurée par des équations linéaires, de type Maxwell, qui mènent, dans le cas d'une solution harmonique, à une équation de type Klein-Gordon, mais régissant les quatre composantes réelles d'un penta-vecteur champ μ^I.

Nous allons montrer qu'il existe un autre système d'équations qui satisfait à la conservation de l'énergie dans $\overset{5}{V}$, mais qui opère dans un espace à quatre dimensions $\overset{4}{V}$: l'espace-temps. En effet, nous allons voir que ces équations ne sont valables que ponctuellement sur les lignes d'univers des corps matériels, ce qui implique notamment une quantification de l'énergie dans $\overset{4}{V}$.

Ce système d'équations est le suivant :

$$\boxed{R_I^J = \mu_I\mu^J \Leftrightarrow R_I^J - \frac{1}{2}R\delta_I^J = \mu_I\mu^J - \frac{1}{2}\mu^2\delta_I^J} \quad \textbf{(b)}$$

où R_I^J est le tenseur de Ricci, R sa contraction.

Suivant la théorie de la RG d'Albert Einstein, ces équations ne peuvent être vérifiées, assurant ainsi la conservation de l'énergie-impulsion de l'onde matérielle, que si :

$$(\mu_I\mu^J - \frac{1}{2}\mu^2\delta_I^J)_{,J} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\mu_i\mu^j - \frac{1}{2}\mu^2\delta_i^j)_{,j} = 0 \\ (\mu^2)_{,5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\psi_i\psi^j - \frac{1}{2}\psi^2\delta_i^j)_{,j}\sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}x_5) = 0 \\ \psi^2(\sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}x_5))_{,5} = 0 \end{cases}$$

Louis de Broglie a souligné dans ses travaux que le caractère ondulatoire de la matière pouvait être attribué à une variabilité de sa masse propre. En ce sens, le caractère corpusculaire de la matière résulterait de la conservation de sa masse propre le long des lignes d'univers. Il en sera établi plus loin dans cette étude.

Nous y montrons que le tenseur $\hat{T}_i^{\,j} = \psi_i \psi^j - \frac{1}{2}\psi^2 \delta_i^j$ est l'expression du tenseur densité impulsion-énergie de la matière dans $\overset{4}{V}$ et que $\sigma = -\frac{1}{2}\psi^2$ représente sa densité de masse propre multiplié par c^2, terme que nous identifions à une densité d'énergie propre.

Selon les relations qui précèdent, $\frac{4\pi}{\lambda}\Delta x_5 = \pi$ est la phase de plus petite valeur satisfaisant à la condition d'invariabilité de la densité de masse propre, d'où $\Delta x_5 = \frac{\lambda}{4}$.

Le continuum d'espace-temps est donc discontinu, constitué d'éléments $\Delta s = \Delta x_5 = \frac{\lambda}{4}$, ce qui entraine une quantification de l'énergie.

En effet, par intégration sur le volume $d\mathrm{v}$ du corpuscule à la frontière spatiale duquel le champ matériel s'annule et sur un intervalle Δs :

$$\int_{\Delta \mathrm{s}}^{2\Delta \mathrm{s}} \int_{\mathrm{v}} \frac{\partial \hat{T}_0^0 d\mathrm{v}}{\partial x^0} \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda} x^5) dx^5 = 0$$

Où la densité d'énergie corpusculaire est :

$$\hat{T}_0^0 = \psi_0 \psi^0 - \frac{1}{2}\psi^2 \delta_0^0 = \frac{1}{2}\left[(\psi_0)^2 + (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + (\psi_3)^2\right]$$

Son intégration volumique représente l'énergie totale du corpuscule E. Il vient, avec les notations habituelles :

$$\int_{\Delta s}^{2\Delta s} \frac{\partial E}{\partial x^0} \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda} x^5) dx^5 = \frac{\partial E\lambda/4}{\partial x^0} = 0 \Rightarrow E\lambda/4 = \text{constante} \Rightarrow \boxed{E = h\nu} \quad \textbf{(c)}$$

avec : constante $= hc/4$

En outre :

$$\boxed{\frac{1}{2E}\int_{\mathrm{v}} \left[(\psi_0)^2 + (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + (\psi_3)^2\right] d\mathrm{v} = 1} \quad \textbf{(d)}$$

Cette relation montre que le terme sous intégrale, strictement positif et normé, est formellement analogue à la densité de probabilité de présence du corpuscule établie dans la théorie de l'électron de P. Dirac, mais à la différence qu'il s'agit ici d'une densité de présence en rapport avec sa densité d'énergie. Remarquons que cette dernière est constituée uniquement des composantes réelles du champ matériel, en comparaison avec les composantes imaginaires du bi-spineur de P. Dirac.

Si Δs est petit, ce qui exige que E soit grand, nous pouvons poser $ds \approx \Delta s$ et symboliquement dans $\overset{4}{V}$:

$$\frac{d}{ds} \equiv u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Alors, nous vérifions :

$$(-\mu^2 u_I u^J)_{,J} = \begin{cases} -(\mu^2 u_i u^j)_{,j} + \dfrac{d(\mu^2 u_i)}{ds} = -(\mu^2 u^j)_{,j} - \mu^2 (u^j u_{i,j} - \dfrac{du_i}{ds}) = -\mu^2 u^j_{,j} \\ -(\mu^2 u^j)_{,j} + \dfrac{d\mu^2}{ds} = -(\mu^2 u^j)_{,j} = -\mu^2 u^j_{,j} \end{cases}$$

Il nous faut démontrer maintenant que $u^j_{,j} = 0$, exprimant, en quelque sorte, le caractère conservatif (causal ?) du flux évènementiel en l'état corpusculaire de la matière.

Nous vérifions d'abord que, moyennant sur x_5 entre Δs et $2\Delta s$, les relations d'in-divergence du tenseur d'énergie-impulsion deviennent :

$$(\psi_i \psi^j - \frac{1}{2}\psi^2 \delta_i^j)_{,j} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^j (\psi_{i,j} - \psi_{j,i}) = 0 \\ \psi^i_{,i} = 0 \end{cases}$$

Notons aussi que $\dfrac{\partial s}{\partial x^i} = u_i - \zeta_i$, avec $\zeta_i u^i = 0$, ce qui vérifie bien : $u^i u_i = 1$. Alors :

$$u^i \psi^j (\psi_{i,j} - \psi_{j,i}) = 0 \Rightarrow -\psi^j \psi_i \frac{du^i}{ds}(u_j - \zeta_j) = 0 \Rightarrow \psi^j \zeta_j = 0$$

Posons à priori $\gamma^i = \dfrac{du^i}{ds}$ colinéaire à ψ^i, hypothèse que nous justifions plus loin.

Par suite, $\gamma^i \zeta_i = 0$ et tenant compte de $\gamma^i u_i = 0$: $u^i_{,i} = \dfrac{du^i}{ds}\dfrac{\partial s}{\partial x^i} = \gamma^i (u_i - \zeta_i) = 0$ et $(-\mu^2 u_I u^J)_{,J} = 0$, ce qui fallait démontrer.

Plusieurs indices, nous entraînent à considérer $\sigma = -\dfrac{1}{2}\psi^2$ comme le produit par c^2 de la densité de masse propre de la matière.

- Un premier indice est le suivant : considérons la particule libre comme une singularité parcourant un tube d'espace-temps $\overset{4}{V}$ de petite section où le champ s'annule à la périphérie et effectuons l'intégration de la divergence du tenseur d'énergie-impulsion sur le volume du tube délimité par deux sections droites voisines orientées selon les vitesses unitaires $-u^i$ et $u^i + \Delta u^i$. Par intégration en appliquant le théorème d'Ostrograski, nous obtenons conformément au principe d'inertie : $(\int_V \sigma \mathrm{dv})\Delta u^i = 0$, où le terme entre parenthèses représente l'énergie propre $m_0 c^2$ du corpuscule.

- Un second indice concerne la densité quantité de mouvement du corpuscule, qui s’exprime de façon habituelle :

$$q_i = \hat{T}_i^j u_j / c^2 = -\frac{1}{2}\psi^2 u_i / c^2$$

- Enfin, un dernier indice concerne une relation relativiste sur la densité d’énergie-impulsion analogue formellement à celle des corps macroscopiques :

$$\hat{T}_0^i \hat{T}_i^0 = (\psi_0 \psi^i + \sigma\delta_0^i)(\psi_i \psi^0 + \sigma c^2 \delta_i^0) = -2\sigma\psi_0\psi^0 + 2\sigma\psi_0\psi^0 + \sigma^2\delta_0^0 = \sigma^2\delta_0^0$$

4- Autre représentation corpusculaire de l’énergie – Masse propre inobservable

Posons :

$$S_i^j = \frac{1}{4}\phi_{kl}\phi^{kl}\delta_i^j - \phi_{ik}\phi^{jk} \text{, avec : } \phi_{ij} = u_i\psi_j - u_j\psi_i$$

Par suite :

$$\hat{T}_i^j = \psi_i\psi^j - \frac{1}{2}\psi^2\delta_i^j = -S_i^j - \psi^2 u_i u^j$$

$$\hat{T}_i^j = \psi_i\psi^j + \sigma\delta_i^j = -S_i^j + 2\sigma u_i u^j$$

Nous obtenons de cette façon une densité d’énergie-impulsion équivalente à la précédente, où il est naturel d’identifier S_i^j, en raison de sa structure, à une forme généralisée du tenseur densité d’énergie-impulsion électromagnétique.

Nous vérifions : $(-S_i^j + \sigma c^2 u_i u^j)u_j = 0$, traduisant le fait que les forces électromagnétiques compensent une moitié des forces dynamiques ; rendant nulle une moitié d’énergie-impulsion dans le calcul de la quantité de mouvement du corpuscule. Ainsi, dans le cas d’un corpuscule isolé, l’intégration volumique de la divergence de la densité d’énergie-impulsion, qui s’écrit :

$$\int_{\mathrm{V}} (-S_i^j + \sigma u_i u^j)_{,j}\, d\mathrm{v} = -(\int_{\mathrm{V}} \sigma \mathrm{dv})\Delta u_i = 0$$

permet d’affirmer qu’une moitié de la masse propre du corpuscule, participant aux forces de cohésion du corpuscule, ne peut pas être observée expérimentalement.

Il existe donc à l’intérieur de la particule des forces intérieures dont la résultante est nulle, entraimant une réduction de moitié de l’impulsion-énergie observable de la particule. Cette impulsion-énergie interne ne sera pas décelable par un observateur, ce qui lui fera attribuer une masse propre apparente de la particule égale à la moitié de sa masse propre réelle.

Lorsque le corpuscule est considéré comme un tout, il nous est donc loisible de poser $\hat{T}_i^j = \sigma u_i u^j$, conformément à la forme établie en R.G.. Ce résultat n’a donc sensiblement pas d’incidence sur les vérifications de validité de la R.G.

Mais revenons à notre hypothèse selon laquelle $\gamma^i = \frac{du^i}{ds}$ est colinéaire à ψ^i et cherchons à vérifier sa pertinence. Considérons en détail la divergence de la seconde forme du tenseur énergie-impulsion :

$$\hat{T}^j_{i,j} = \phi^{jk}_{,\ k}\phi_{ij} + \frac{1}{2}(\phi_{ij,k} + \phi_{jk,i} + \phi_{ki,j})\phi^{jk} - 2\sigma\gamma_i = 0$$

Tenant compte des résultats précédents, calculons :

$$\psi_j\phi^{jk}_{,\ k} = \psi_j(u^j\psi^k - u^k\psi^j)_{,k} = (u^j\psi^k - u^k\psi^j)\psi_{j,k} = \psi^k\psi_j u^j_{,k} = \psi^k\psi_j\gamma^j(u_k - \zeta_k) = 0$$

Alors :

$$\phi^{jk}_{,\ k}\phi_{ij} = u_j\phi^{jk}_{,\ k}\psi_i = (u^j\psi^k - u^k\psi^j)\gamma_j(u_k - \zeta_k)\psi_i = \boxed{-\psi^j\gamma_j\psi_i = 2\rho\psi_i} \quad \textbf{(e)}$$

Où $\rho = -\frac{1}{2}\psi^j\gamma_j$ apparaît comme la densité de charge électrique.

Enfin :

$$\begin{aligned}&(\phi_{ij,k} + \phi_{jk,i} + \phi_{ki,j})\phi^{jk} = ((u_{i,k} - u_{k,i})\psi_j + (u_{j,i} - u_{i,j})\psi_k + (u_{k,j} - u_{j,k})\psi_i + \\ &(\psi_{j,k} - \psi_{k,j})u_i + (\psi_{k,i} - \psi_{i,k})u_j + (\psi_{i,j} - \psi_{j,i})u_k)(u^j\psi^k - u^k\psi^j) = \\ &-2\gamma_i\psi^2 + 2\gamma_j\psi^j\psi_i = 0 \Leftrightarrow \psi^j(\gamma_i\psi_j - \gamma_j\psi_i) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma_i\psi_j - \gamma_j\psi_i = 0$ apparaît comme une condition théorique suffisante pour assurer la conservation de l'énergie-impulsion du corpuscule dans $\overset{4}{V}$, mais aussi la plus simple. Par ailleurs, elle est la condition nécessaire de conservation de l'énergie-impulsion de l'onde matérielle dans $\overset{5}{V}$, ce qui en assure sa validité.

Remarquons aussi que poser $x_5 = n\frac{\lambda}{4}$, où n est un nombre entier positif, constitue un système de coordonnées particulières de $\overset{5}{V}$. Dans un repère de ce système, nous avons $T^J_{I,\,J} = 0$. Le caractère tensoriel de cette expression implique sa validité quelle que soit la valeur de x_5. Ainsi, la conservation de l'énergie-impulsion de l'onde matérielle résulte des solutions de l'équation de champ régissant le corpuscule.

En conclusion, remarquons que l'article peut se résumer très succinctement ainsi : l'univers fondamental est à 5 dimensions. Il est régit par l'équation de champ tensorielle suivante :

$$\frac{R^J_I}{R} = \frac{\gamma_I\gamma^J}{\gamma^2} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_i\gamma^j}{\gamma^2} & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{pmatrix}$$

où $\emptyset$ désignent une ligne ou une colonne composée de 4 zéros, tenant compte de $\gamma^5 = 0$.

Nous vérifions alors qu'une solution de métrique de $\overset{5}{V}$ est de la forme :

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} g_{ij} & \emptyset \\ \emptyset & -1 \end{pmatrix}$$

où il apparaît que l'espace-temps est un sous-espace de $\overset{5}{V}$, dont nous avons montré que son existence peut-être ponctuelle et périodique, ce qui implique une discontinuité des lignes d'univers de la matière et la division apparente de son énergie en quanta.

En outre, $\psi_i = \gamma_i \sqrt{R/\gamma^2}$ d'où : $\psi_i \gamma_j - \psi_j \gamma_i = 0$; relation dont nous vérifions qu'elle apparaît ici comme l'équation générale de mouvement d'un point matériel dans l'espace-temps.

Le cas de la particule liée par un champ extérieur reste à étudier.

2ème partie

1- Introduction

En mécanique quantique, l'équation de Klein-Gordon peut s'établir de deux façons : la première en faisant usage du principe de correspondance, la seconde par le biais de l'outil spineur comme l'a montré Paul Dirac. Or cette équation est fondamentale pour l'étude des particules puisque se déclinent d'elle les équations de E. Schrödinger et de P. Dirac dont la véracité ne fait aucun doute au regard des vérifications expérimentales.

La question qui se pose est la suivante : y-a-t-il une possibilité d'établir l'équation de Klein-Gordon par voie classique, sans faire intervenir opérateur complexe ou bi-spineur ?

Dans la première partie de cet essai, nous avons vu que cette équation pouvait être obtenue tenant compte d'un univers à 5 dimensions dans lequel les particules spatio-temporelles se déplacent à la célérité de la lumière. Mais pour un observateur de l'espace-temps $\overset{4}{V}$, l'équation de Klein Gordon doit être établie uniquement sur la base d'éléments qui y sont à sa portée.

Reprenons l'expression de conservation du tenseur d'énergie local et où nous avons vérifié ceci :

$$(\psi_i \psi^j - \frac{1}{2}\psi^2 \delta_i^j)_{,j} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^j(\psi_{i,j} - \psi_{j,i}) = 0 \\ \psi^j_{,j} = 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire au premier groupe d'équations, il est loisible de poser :

$$\boxed{\psi_{i,j} - \psi_{j,i} = \varepsilon_{ijkl} \nu^k \psi^l} \quad \textbf{(f)}$$

où ε_{ijkl} désigne le tenseur de Levi-Civita d'ordre 4 et ν^k une fréquence tempo-spatiale que nous égalons à priori au quadrivecteur énergie-impulsion local $\sigma u_i = -\frac{1}{2}\psi^2 u_i$ à un coefficient constant près.

Mais une particule est un objet extrêmement petit et sa dynamique intérieure n'est pas accessible. Ainsi, nous assimilons la particule libre comme objet formant un tout en un point de l'espace. En dehors de la particule nous avons $\nu_i = 0$ et à son endroit, d'après De Broglie : $\nu_i = \frac{m_0 c}{\hbar} u_i$

En dérivant par rapport à j, tenant compte de la relation $\psi^j_{,j} = 0$ et $\nu_i \psi^i = 0$, la relation **(f)** permet d'aboutir à l'équation de Klein-Gordon :

$$\textbf{(g)}\begin{cases} \delta^{jk}\psi_{i,jk} = \varepsilon_{ijkl}\nu^k\psi^{l,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\nu^k(\psi^{l,j} - \psi^{j,l}) \\ \delta^{jk}\psi_{i,jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\nu^k\varepsilon^{ljmn}\nu_m\psi_n = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ljki}\varepsilon^{ljmn}\nu^k\nu_m\psi_n \\ \delta^{jk}\psi_{i,jk} = -(\delta_k^m\delta_i^n - \delta_k^n\delta_i^m)\nu^k\nu_m\psi_n = -\nu^2\psi_i \\ \boxed{\delta^{jk}\psi_{i,jk} + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\psi_i = 0} \end{cases}$$

L'équation différentielle **(f)** est analogue à l'équation de P. Dirac en ce sens qu'elle a pour conséquence l'équation de Klein-Gordon et la normalisation de la fonction d'onde au regard de la relation **(d)**, mais aussi parce qu'elle est linéaire et du premier ordre. Toutefois, une différence importante entre les deux équations est que l'onde est ici à composantes réelles formant un quadrivecteur et non pas un bi-spineur. Ce simple exposé, qui nécessite assurément d'être approfondi, est peut-être un point de départ pour une nouvelle formulation de la mécanique quantique.

Enfin, notons que ce calcul ne concerne que la particule libre et qu'une étude spéciale est nécessaire pour introduire dans la théorie l'action d'un champ extérieur sur la particule.

A Orléans les : 4 août 2021 / 9 décembre 2021 / 5 avril 2022 / 12 septembre 2022 / 30 janvier 2023

Christian Preziosa